IDEAS QUE MUEVEN ANDALUCÍA

Dany Leviatan

El arte de las matemáticas y el origen de la teoría de la aproximación

Dany Leviatan
Doctor Honoris Causa por la Universidad de Jaén.

Universidad de Jaén

Universidad de Jaén

IDEAS QUE MUEVEN ANDALUCÍA

Dany Leviatan

El arte de las matemáticas y el origen de la teoría de la aproximación

Ideas Fuerza

01.- Las matemáticas no son una ciencia

02.- Dos necesidades humanas

03.- Lo que hay es buena matemática y mala

04.- Cortar un leño de madera en dos piezas

05.- El número irracional

06.- El origen de la teoría de la aproximación

07.- Las Matemáticas tratan sobre verdades

Dany Leviatan

El arte de las matemáticas y el origen de la teoría de la aproximación

ARGUMENTO

“Los biólogos quieren ser vistos como químicos; los químicos piensan que son físicos, los físicos creen que son Dios... y Dios cree que es matemático.” Así resume Dany Leviatán una de sus principales conclusiones tras largos años de Rector de universidad y matemático en Israel.

“Las matemáticas son un arte”, dice Leviatan; “un arte que tenemos que aprender para ser capaces de entenderlo y que después nos obliga a rendirnos ante su belleza”

En su discurso de investidura Honoris Causa ante la Universidad de Jaén, Dany Leviatán define las matemáticas como un arte motivado por dos necesidades humanas paralelas; la necesidad de resolver problemas prácticos cotidianos y la necesidad de descubrir nuevas verdades.

“Por eso decimos que no hay una matemática aplicada y una matemática pura; lo que hay es buena matemática y, por desgracia, también algo de mala matemática. Y deberíamos esforzarnos en trabajar siempre en la primera.”

En su conferencia el nuevo Doctor Honoris Causa de la Universidad de Jaén no sólo habla de cómo los antiguos podían cortar un leño de madera en dos piezas con ayuda de números racionales, sino que también nos muestra cómo la democracia ateniense podía sentirse profundamente amenazada con el descubrimiento de los números irracionales; “aquellos que no tienen sentido y son incomprensibles”.

Elevado el número irracional a la categoría de autoridad imaginaria, el profesor Leviatan centra el origen de la Teoría de la Aproximación en el intento de responder a la insistente pregunta de un ingeniero amigo que se estaba volviendo loco resolviendo la cuadratura del círculo; “Ya se que no es 3,14, pero ¿acaso no es 22/7?”

Para Leviatan las matemáticas tratan sobre verdades; “En las Matemáticas no hay ninguna afirmación que no esté demostrada que tengamos que “creernos”. No obstante, siempre estamos dentro de un determinado modelo matemático, sujetos a un conjunto específico de verdades absolutas (axiomas), aceptadas por todo aquel que desee trabajar en ese modelo matemático.”

Dany Leviatan

El arte de las matemáticas y el origen de la teoría de la aproximación

CONFERENCIA

Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Jaén

Claustro de la Universidad

Señoras y Señores

Permítanme comenzar mi intervención agradeciendo a la Universidad de Jaén, al Rector y al Claustro por el honor que me han otorgado. Ha sido para mí una sorpresa completamente inesperada.

Las matemáticas no son una ciencia

Las Matemáticas están consideradas como la madre de las ciencias, aunque ellas mismas no son una ciencia, puesto que no siempre guardan relación con la realidad de nuestro mundo físico.

Las Matemáticas son un arte. Un arte que tenemos que aprender para ser capaces de entenderlo, y que después nos obliga a rendirnos ante su belleza.

Es increíble, por no decir incomprensible, que las Matemáticas, a pesar de haberse desarrollado fundamentalmente en el cerebro y en los pensamientos de seres humanos, sean capaces de resolver los problemas que surgen en cualquier disciplina científica y de proporcionar modelos y herramientas de investigación que han permitido a la humanidad avanzar hasta el punto en el que hoy se encuentra.

Dos necesidades humanas

Desde sus inicios en Babilonia y en la antigua Grecia, las Matemáticas estuvieron motivadas por dos necesidades humanas paralelas y que no son mutuamente excluyentes.

Una de ellas era la necesidad de resolver los problemas prácticos que surgen en la vida cotidiana, como la construcción (que planteaba problemas relacionados con la geometría), la astronomía, las estaciones, el ciclo mensual de la luna o el ciclo anual del sol y su influencia sobre la vida, etc.

La otra no era sino la curiosidad humana, el desafío intelectual que supone el hecho de comprender cada vez más cosas, de ser capaces de descubrir nuevas verdades y explicar fenómenos nuevos.

Dany Leviatan

El arte de las matemáticas y el origen de la teoría de la aproximación

CONFERENCIA

Cuando se preguntó a Sir Edmund Hillary (el primer hombre que coronó la cima del Everest) por qué había decidido ascender a la montaña más alta del mundo, respondió: “¡Porque estaba allí!”.

Es lo mismo que respondería un matemático a una pregunta similar: “¿Por qué ha decidido intentar entender el comportamiento de este o aquel conjunto de objetos?” Trataré de ilustrar este punto con algunos ejemplos a lo largo de mi discurso.

Por tanto, algunos matemáticos trabajan motivados por las aplicaciones prácticas de esta disciplina y otros por la necesidad de satisfacer su curiosidad. Sin embargo, estas dos categorías no son mutuamente excluyentes.

Lo que hay es buena matemática y mala

En muchos casos se produce una interacción en ambas direcciones, entre las preguntas que surgen en los diferentes ámbitos científicos y los fenómenos que descubren los matemáticos.

No obstante, lo sorprendente es que no es posible predecir qué hallazgo matemático tendrá aplicaciones prácticas en el futuro.

Por eso decimos que no hay una matemática pura y una matemática aplicada; lo que hay es buena matemática y, por desgracia, también algo de mala matemática, y deberíamos esforzarnos en trabajar siempre en la primera.

Cuando los matemáticos comenzaron a jugar con los números imaginarios, nadie podía prever el impacto que este tipo de números tendría en el desarrollo del electromagnetismo.

Más recientemente, cuando Alan Turing empezó a jugar con lo que se conoce como la máquina de Turing, nadie podía imaginar que hoy no podríamos entender cómo éramos capaces de vivir sin ordenadores, sin correo electrónico ni Internet.

¿Y la Teoría de Números? Se dice que el gran matemático británico G. H. Hardy brindó una vez por ella, porque no sirve para nada, pero ha demostrado ser indispensable para la codificación y las tareas informáticas en general.

Y éstas son solo algunas de las áreas en las que las ideas matemáticas, guiadas sólo por la curiosidad, terminaron cambiando nuestras vidas.

Hardy, por cierto, llevó a cabo un trabajo ingente, y no solo en la Teoría de Números sino también en el campo del análisis armónico y la teoría de la aproximación. Ambos temas tienen tantas aplicaciones que el matemático inglés debe de estar agitándose en su tumba, porque él estaba orgulloso de ser un matemático "puro" y proclamaba que nada de lo que había hecho serviría jamás a la humanidad.

Cortar un leño de madera en dos piezas
Pero, si me lo permiten, vamos a retroceder un tanto en la historia. Todos conocemos y utilizamos los números enteros: 1, 2, 3, etc. Los matemáticos los llamamos "números naturales". Sabemos cómo sumarlos y multiplicarlos.

Incluso algunos de nosotros sabemos hacer restas, lo que nos lleva al cero y a los enteros negativos: -1, -2, -3, etc. Los más avanzados de nosotros sabemos incluso cómo dividir un entero por otro, siempre que el otro no sea cero.

Lo que obtenemos con la operación son cocientes de enteros, que se conocen con el nombre de números racionales (palabra que procede de ratio, que significa "cociente"), y podemos decir que los conocemos con exactitud.

Ilustraré esto con algo que ya sabían los antiguos griegos. Si queremos cortar un leño de madera en dos pedazos, uno de ellos cuatro veces más largo que el otro, es decir, uno que mida 4/5 de la longitud del leño y otro que, por supuesto, medirá 1/5 de dicha longitud, y queremos hacerlo utilizando únicamente medios primitivos (una regla y un compás), tendremos que hacer lo siguiente.

Tomamos una vara en la que marcamos cinco puntos que se encuentren a una distancia igual entre sí. ¿Cómo? Tomamos una vara mucho más pequeña, la colocamos junto a la vara mayor y marcamos su extremo; a continuación movemos la vara pequeña hasta ese punto y marcamos de nuevo el extremo, y así sucesivamente hasta que tengamos cinco partes de idéntica longitud.

Juntamos el extremo de la vara y uno de los extremos del leño, pero formando un ángulo. Ahora cogemos una cuerda y la atamos a los otros dos extremos de la vara y del leño.

Tomamos una segunda cuerda, la atamos al punto en el que hemos marcado la cuarta parte de la vara y la colocamos en paralelo a la primera cuerda. El punto en el que se junta con el leño divide este en dos piezas con el tamaño deseado.

El número irracional

Podemos decir que estamos bastante familiarizados con los números racionales. Los griegos construyeron a continuación la diagonal de un cuadrado de lado 1, o, en otras palabras, la hipotenusa del triángulo isósceles de lado 1.

Gracias al Teorema de Pitágoras, los griegos sabían que la longitud de esa hipotenusa era la raíz cuadrada de 1+1, es decir $\sqrt{2}$ y podían obtener fácilmente un leño de esa longitud (con mucha más facilidad que en el caso de la obtención de dos fragmentos de leño que les he explicado antes, con longitudes de 1/5 o 4/5).

Sin embargo, para gran sorpresa de los antiguos griegos, no es un cociente de dos números enteros, es decir, no es un número racional. Los matemáticos griegos lo bautizaron con el nombre de “número irracional” (lo que significa que no tiene sentido, que es incomprensible; obsérvese que está relacionado con los números racionales por ser no racional, pero también con la razón en sentido mental).

Es bien conocido el hecho de que los matemáticos griegos intentaron guardar estos números en secreto para que no llegasen a oídos de los ciudadanos de Atenas, ¡diciendo nada menos que esta información destruiría los cimientos de la democracia!

Un matemático siente despertar inmediatamente su curiosidad por la raíz cuadrada de 3, 4, 5, etc. Como es obvio, $\sqrt{4}$ =2, que no sólo es un número racional, sino incluso un número entero.

Resulta, por tanto, que la raíz cuadrada de un entero positivo (un número natural) puede ser un número entero o un número irracional.

Pero tal afirmación debe ser demostrada; no podemos comprobar qué sucede con cada número natural por separado, debemos buscar otra forma de convencer a todo el mundo de ello. No se preocupen, no voy a demostrarlo aquí.

Sin embargo, sí quiero hacer notar que, como han podido ver en lo que acabo de exponerles, los matemáticos intentan generalizar propiedades que son válidas para algunos números a todos ellos, o hacer extensible el comportamiento de una determinada función a todas las funciones de características similares.

Platón dijo una vez: tenemos tres gatos y tres perros, y lo que tienen en común entre ellos, el concepto abstracto, es el número 3. Los matemáticos decimos que tenemos el número 3 y el número 7, y los denominamos con un nombre común abstracto: “n”.

Volviendo a la $\sqrt{2}$, su resultado es aproximadamente 1,4; de hecho es mayor que 1,414 pero menor que 1,415. También es mayor que 1,4142 pero inferior a 1,4143, y podríamos seguir así toda la vida, sin llegar nunca a obtener el valor exacto de la $\sqrt{2}$, porque si lo consiguiéramos, eso significaría que es racional.

Por tanto, aunque sabemos realizar exactamente las cuatro operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) con los números racionales, sólo podemos conocer, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, y otros de forma aproximada; ¿cómo podremos sumarlos o multiplicarlos?

Veo que he logrado hacerles preguntarse sobre algo que daban por supuesto. Pero ahora quiero dar una vuelta de tuerca más.

Al fin y al cabo, en los ejemplos anteriores todos los que estamos aquí sabemos cómo obtener una aproximación cada vez más precisa a los valores reales de esas raíces cuadradas.

Todos nosotros sabemos cómo extraer la raíz cuadrada de un número racional, y nos detenemos cuando el cálculo termina, por ejemplo, en $\sqrt{2.064969}$ = 1,437, un valor exacto, o cuando vemos que el cálculo puede continuar indefinidamente, pero obtenemos una aproximación cada vez más exacta. Tomemos, por tanto, un ejemplo diferente.

Todos los presentes sabemos que la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es π.

De nuevo se trata de un número irracional, pero su naturaleza es completamente diferente de la de los números irracionales de los ejemplos anteriores. Todos los ingenieros saben que π es aproximadamente igual a 3,14 (de hecho, muchos creen que en realidad su valor es igual a 3,14). Puedo decirles que 3,1415 constituye una aproximación más exacta, pero de nuevo este valor no es igual a π, puesto que no podemos representar a π como un cociente de dos números enteros positivos.

Podemos continuar obteniendo una aproximación cada vez más exacta a π, cosa que no voy a hacer; los métodos matemáticos que abordan estas cuestiones quedan muy alejados de lo que hoy estamos tratando aquí. En lugar de ello quiero contarles algunas anécdotas que guardan alguna relación con todo esto.

El origen de la teoría de la aproximación

Hace muchos años, un ingeniero amigo mío me llamó para exponerme un problema que le estaba volviendo loco. “¿Por qué no podemos encontrar la cuadratura del círculo?”, me preguntó.

Por simplificar, utilizó para π el número 22/7≈3,142. Observen que este valor es más cercano a π que 3,14, por ejemplo podemos obtenerlo redondeando los otros dígitos que he mencionado antes (,00159) a ,002. Yo le dije que π no es igual a 22/7, a lo que me respondió: “Ya sé que no es 3,14, pero ¿acaso no es 22/7?” ¡Pues no, no lo es!

La segunda anécdota que voy a contarles es muy especial para mí. Tengo que empezar por explicarles que, en lengua hebrea, cada letra lleva asociado un valor numérico, de manera que Alef (α) tiene el valor 1, Bet (β) tiene el valor 2 y así sucesivamente.

En la Biblia, mi Biblia, que a veces se denomina “Antiguo Testamento”, se describe cómo se construyó el templo de Jerusalén.

Entre otras cosas, se dice que la relación entre la longitud de una determinada circunferencia y su diámetro es 3.

Sin embargo, en lugar de la palabra “circunferencia”, que en hebreo tiene el valor 106, escriben una palabra diferente pero parecida, algo así como “circumferencia” (que no existe en hebreo, como tampoco en español), cuyo valor es 111.

CONFERENCIA

De ese modo contamos con un truco para multiplicar 3 por 111/106 con el fin de obtener una aproximación a π, y cuando lo hacemos obtenemos el valor 3,1415, que como ven es una aproximación más exacta que la de mi amigo, el ingeniero de la era moderna.

¡Podría decirse que aquello fue el origen de la teoría de la aproximación!

Los números reales contienen muchísimos más números irracionales que racionales, pero aquellos no son fáciles de encontrar.

Otro número irracional que aparece de forma natural es el número e, la base del logaritmo natural, cuyo valor es aproximadamente 2,71828.

Por supuesto, al igual que sucede en el caso de π, tampoco existe una expresión exacta para este número. Debemos la notación de e al gran matemático suizo que vivió en la corte de Catalina la Grande, Emperatriz de Rusia, en San Petersburgo.

Ya he mencionado los números imaginarios, que se obtienen a partir del producto de números reales por el factor $i = \sqrt{-1}$.

Hoy en día todo el mundo sabe que es imposible realizar la raíz cuadrada de un número negativo, puesto que el producto de dos factores positivos o negativos siempre arroja un resultado no negativo.

Sin embargo, no se puede subestimar la importancia de la invención de i, que como he mencionado antes, desempeñó un papel fundamental, entre otras cosas, en nuestra comprensión del electromagnetismo.

Fue Euler quien dijo que tenía una prueba de la existencia de Dios, y la prueba es que los tres números "π", "e" e "i", que aparentemente no guardan relación alguna, en realidad sí están relacionados, y de forma muy estrecha. Es lo que se conoce como ecuación de Euler: $e^{i\pi} = -1$.

No voy a explicar, por supuesto, cómo hemos elevado un número irracional a la categoría de autoridad imaginaria; intuyo que esta frase, en sí misma, les puede hacer sonreír, pero si no piensan que es divertido, entonces deben pensar que es inconcebible.

Quiero referirme brevemente a la teoría de la aproximación, aunque sé que lo que voy a decir me hará perder gran parte del público.

CONFERENCIA

Si utilizamos la letra x para describir un número real, podemos preguntarnos qué es x^2.

Dado que en el caso de muchos números reales solo podemos llegar a conocer x de manera aproximada, es evidente que solo podremos hallar x^2 también de forma aproximada.

Posteriormente puede que queramos calcular x^3, x^4, y así sucesivamente. Cuanto mayor sea la precisión de cálculo de x, mejor será la aproximación que obtengamos de x^2, x^3, etc.

Podemos sustituir diferentes valores por x, lo que nos llevará a obtener distintos valores para x^2, etc.

Conocemos esto con el nombre de funciones, y estas son las funciones más simples de las que disponemos. Las utilizamos como piedras angulares, multiplicándolas por constantes y sumándolas, con el fin de aproximar los valores de seno de x, de e^x, de ln x, y de muchas otras funciones bastante más complejas, sea cual sea su definición.

Puede tratarse, por ejemplo, de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales, que quizá ni siquiera nosotros sepamos cómo resolver exactamente, de forma que nuestras soluciones no pasarán de ser aproximadas.

Por tanto nosotros, los teóricos de la aproximación, diseñamos herramientas y algoritmos cuya finalidad es aproximarnos a funciones complicadas a través de otras más sencillas.

Las Matemáticas tratan sobre verdades

Ahora que ya he pagado mi tributo particular a la teoría de la aproximación, déjenme que hable un poco sobre las matemáticas en general.

Las Matemáticas tratan sobre verdades. En las Matemáticas no hay ninguna afirmación que no esté demostrada, que tengamos que "creernos".

No obstante, siempre estamos dentro de un determinado modelo matemático, sujetos a un conjunto específico de verdades absolutas (axiomas), aceptadas por todo aquel que desee trabajar en ese modelo matemático.

CONFERENCIA

Los axiomas deben cumplir dos reglas básicas. Su número debe ser mínimo, pero suficiente para dar lugar a conclusiones interesantes, lo que los matemáticos llamamos teoremas.

Y, lo que en cierto sentido es más importante, los axiomas no deben contradecirse entre sí, porque uno puede demostrar cualquier cosa si parte de una falsedad. Quiero detenerme un poco en este punto.

Una convención matemática básica es que el enunciado “si p, entonces q”, o (una afirmación equivalente) “p implica q”, es verdadero si q es verdadero o p es falso.

A modo de ejemplo, he aquí un enunciado verdadero: “Si Jaén es plano, entonces el mundo es plano”.

No, no estoy diciendo que la Tierra sea plana, esta teoría fue rebatida mucho antes de que Colón quisiera demostrar que navegando hacia el Oeste llegaría a la India.

Entonces, ¿por qué es cierto el enunciado anterior? Porque Jaén no es plano sino montañoso, es decir, porque p es falso.

Dado que las personas normales suelen sentirse algo confusas ante semejante afirmación, les contaré una anécdota que confío sirva para convencerles.

El gran matemático y filósofo británico Bertrand Russell se enfrentó en clase a un estudiante que le desafió a demostrar, bajo el enunciado falso de que “2 + 2 = 5” (nuestra p), que “él (Russell) y el Papa eran una misma persona” (nuestra q).

Russell lo demostró de forma inmediata y sin pestañear. “Dado que 2+2 = 4, eso significa que 4 = 5. Por tanto, 3 = 4 y 2 = 3, y, por último, 1 = 2. “Pues bien”, dijo Russell, “dado que el Papa y yo somos dos personas y dos es igual a uno, queda demostrado que el Papa y yo somos una misma persona”.

Volvamos a los axiomas. Tenemos los axiomas de la geometría plana. Entre ellos, el que afirma que dos líneas rectas se cortan como máximo en un punto, y también están los axiomas de la geometría de la superficie esférica, donde los objetos análogos a las líneas rectas son los grandes círculos. A saber; los que tienen el mismo diámetro que la esfera y se cortan entre sí en dos puntos.

Piensen en el Polo Norte y el Polo Sur; esos son los dos puntos de corte de numerosos grandes círculos. Cada uno de ellos compuesto por dos longitudes. Cada uno de esos grandes círculos cruza el ecuador dos veces.

El modelo de la geometría plana resulta adecuado para trabajar a pequeña escala, pero cuando uno maneja misiles balísticos debe tener en cuenta que la Tierra es aproximadamente esférica.

Cuando uno quiere dedicarse a las matemáticas tiene que decidir a qué quiere jugar, es decir, qué conjunto de axiomas rigen el modelo en el que va a trabajar.

Una ecuación cuadrática puede tener dos raíces, una o ninguna en la recta de los números reales, pero siempre tiene dos raíces en el plano complejo.

Ahora que estoy llegando al final de mi ponencia, me siento obligado a mencionar el Teorema de Incompletitud de Kurt Gödel, que afirma que en cualquier modelo matemático hay enunciados imposibles de probar o de refutar dentro de ese sistema.

Permítanme, por último, que les cuente lo que he aprendido después de muchos años de dirigir una universidad a la vez que me dedicaba a las Matemáticas.

Los biólogos quieren ser vistos como químicos; los químicos piensan que son físicos, los físicos creen que son Dios... y Dios cree que es matemático.